

**“ Sur quelques généralisations
du théorème de Stone-Weierstrass ”**

THÈSE

PRÉSENTÉE

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy

POUR L'OBTENTION

du Doctorat de Spécialité (Mathématiques)

par

MAURICE BOLUS

Soutenue le 15 Juin 1957 devant la Commission d'Examen

Président. MM. GAUTHIER
Examineurs } HERVE
BRUHAT

" Sur quelques généralisations
du théorème de Stone-Weierstrass "

Digitized by the Internet Archive
in 2026

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy

de Doctorat de Spécialité (Mathématiques)

MAURICE BOLUS

Présentée le 15 mai 1955 devant le Jury d'Examen



Président : M. GUTHRIE
Rapporteur : M. JENY
Examinateur : M. BOUAFIA

**“ Sur quelques généralisations
du théorème de Stone-Weierstrass ”**

THÈSE

PRÉSENTÉE

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy

POUR L'OBTENTION

du Doctorat de Spécialité (Mathématiques)

par

MAURICE BOLUS

Soutenue le 15 Juin 1957 devant la Commission d'Examen



Président. MM. GAUTHIER
Examineurs } HERVE
BRUHAT

UNIVERSITE DE NANCY - FACULTE DES SCIENCES

DOYEN : M. URION

ASSESEUR : M. ECHEVIN

DOYENS HONORAIRES: MM. HUSSON, CORNUBERT, DELSARTE.

PROFESSEURS HONORAIRES: MM. DARMOIS E., GUTTON, CROZE, DARMOIS G., RAYBAUD, FALLOT, LAFFITTE, LERAY, HUSSON, DONZELOT, JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, CODEMENT, DUBREIL, SCHWARTZ, DIEUDONNE, de MALLEMANN, LONGCHAMBON.

MAITRES DE CONFERENCES HONORAIRES : MM. RAUX, LIENHART.

PROFESSEURS :

MM. LONGCHAMBON	Minéralogie	MM. ECHEVIN	Botanique
CORNUBERT	Chimie organique	WAHL	Chimie org.industrielle
CHEVALLIER	Physique	BARRIOL	Chimie théorique
URION	Chimie biologique	OLMER	Physique appliquée
DELSARTE	Analyse supérieure	BIZETTE	Physique
REMY	Zoologie	GUILLIEN	Electronique
ROUBAULT	Géologie	GIBERT	Génie chimique
LETORT	Chimie minérale	HERVE	Calcul diff.et intégral
GUERIN	Chimie industrielle	LEGRAS	Mécanique rationnelle
DODE	Chimie phys.et électroch.	CHAPELLE	Physique
VEILLET	Biologie animale	DAVID	Chimie biologique
GAUTHIER	Mathématiques appliquées		

MAITRES DE CONFERENCES :

MM. WERNER	Botanique	MM. NICLAUSE	Génie chimique
AUBRY	Chimie	GARNIER	Agronomie
BOLFA	Minéralogie	BRUHAT	Mathématiques générales
BESSON	Chimie minérale	COPPENS	Radiogéologie
FAIVRE	Physique de l'état mét.	DUVAL	Chimie
FRUHLING	Radiotechnique	SADRAN	Géochimie
GAYET	Physiologie	CHAPON	Chimie biologique
COMOLET	Mécanique physique	HADNI	Physique
MANGENOT	Phytopathologie	Mme ROIZEN	Physique
LIONS	M.M.P.	HILLY	Géologie de la Lorraine

SECRETAIRE : M. LAPOINTE

Qu'il nous soit permis d'exprimer
ici notre profonde gratitude à M. F. BRUHAT,
pour les conseils qu'il nous a constamment
prodigués, à M. C. GLAESER, pour l'intérêt
qu'il nous accorda en de nombreuses occasions.

Nous remercions également M. L. GAU-
THIER et M. M. HERVÉ¹ qui ont bien voulu nous
faire l'honneur respectivement de présider
notre Jury et d'en être membre.

o
o o

I - I N T R O D U C T I O N - =====

Nous nous servons dans ce qui suit de résultats établis dans le mémoire de Kaplansky : "The structure of certain operator algebras" que nous allons rappeler. Le problème central considéré au paragraphe 3 de cet article est de généraliser le théorème classique de Stone-Weierstrass pour certaines algèbres non-commutatives de champs d'opérateurs hilbertiens. De manière précise, considérons un espace compact quelconque X , un ensemble de C^* -algèbres A_x associées d'une façon arbitraire aux points x de X , la C^* -algèbre $\mathcal{E}_X$ de tous les champs définis et uniformément bornés sur X , prenant leurs valeurs dans les différentes algèbres A_x . L'extension du théorème de Stone-Weierstrass conduit dans le cas général à deux types d'énoncés affirmant:

A) que les sous-algèbres B de $\mathcal{E}_X$, 1) autoadjointes (l'élément adjoint étant défini ponctuellement), 2) biapprochantes (c'est-à-dire contenant des champs prenant en des points arbitraires x et y de X des valeurs arbitraires données dans A_x et A_y), 3) fermées relativement à une certaine topologie définie sur $\mathcal{E}_X$, 4) constituées de champs possédant une certaine continuité, sont fermées pour la multiplication par les fonctions continues sur X et à

valeurs réelles: i. e. si B contient le champ $f(x)$, B contient le champ $f(x)\lambda(x)$, où $\lambda(x)$ est une fonction réelle continue sur X arbitraire. B) que si B et b sont deux sous-algèbres de $\mathcal{E}_b$ vérifiant les conditions 1), 2), 3), 4) ci-dessus, si B contient b et si b est biapprochante dans les traces de B sur les diverses algèbres A_x , alors $b = B$.

En principe l'énoncé B) peut se déduire de l'énoncé A par l'emploi de partitions de l'unité continues sur X .

Dans les cas traités dans le mémoire cité, la topologie définie sur $\mathcal{E}_b$ est la topologie d'espace vectoriel normé définie par la norme: $\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ pour $f \in \mathcal{E}_b$, et les conditions imposées aux champs sont essentiellement des conditions de continuité de la norme de ces champs en chaque point de X . Pour plus de commodité, nous formulerons de la manière suivante les résultats de Kaplansky que nous utiliserons:

Soient X un espace compact, A_x une famille de C^* -algèbres associées aux points de x et appartenant toutes à l'un des types suivants: I) avec unités, II) duales, B une algèbre de champs définis sur X , à valeurs dans les algèbres A_x , et à normes continues. Nous supposons B autoadjointe, biapprochante et fermée dans la C^* -algèbre $\mathcal{E}_b$. Alors B est fermée pour la multiplication par les fonctions continues réelles sur X , moyennant dans le cas I une hypothèse supplémentaire H sur les champs de B , qui sera ou bien l'hypothèse a "de Kaplansky (si $f(x) = 1$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de x tel que

$\|f(y) - I\| < \varepsilon$ pour $y \in U$), ou bien l'hypothèse que B contient le champ I ($= I$ dans chaque A_x).

Notons que la démonstration de ces propriétés repose essentiellement sur la continuité du spectre local d'un champ hermitien dans certaines conditions assez rigides: Soit X un espace topologique en chaque point duquel est donnée une C^* -algèbre A_x et soit A une sous-algèbre autoadjointe fermée dans $\mathcal{E}_b$, constituée de champs à normes continues en 0. Soit f un élément hermitien de A ; alors pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x tel que pour tout $y \in U$, le spectre de $f(y)$ soit contenu dans un ε -voisinage de l'ensemble formé de 0 et du spectre de $f(x)$.

En raison de l'existence des résultats fort généraux rappelés ci-dessus, nous avons été conduits à considérer d'autres types de convergence uniforme sur X . Par exemple, en prenant les algèbres A_x toutes identiques à une même C^* -algèbre A , en considérant cette algèbre A comme une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ fixe, nous pourrions considérer sur $\mathcal{E}_b$ la topologie de la convergence forte uniforme sur X .

II.- Théorèmes de Stone-Weierstrass pour certaines algèbres de champs fortement continus d'opérateurs définis sur un espace de Hilbert fixe .

Démontrons d'abord le lemme suivant:

Lemme I , soient X un ensemble compact, Δ_x des C^* -algèbres (duales ou avec unités) associées aux points x de X .

Soit Δ une algèbre autoadjointe, fermée dans l'algèbre $\mathcal{E}_b$ munie de la norme sup., de champs à normes continues, définis sur X , à valeurs dans les différentes algèbres Δ_x , et remplissant en chaque point x toute l'algèbre Δ_x . Soit δ une sous-algèbre de Δ , autoadjointe, fermée pour la même topologie de $\mathcal{E}_b$, et biapprochante dans les algèbres Δ_x . Alors $\delta = \Delta$, pourvu dans le cas où les algèbres Δ_x possèdent toutes des unités que Δ et δ vérifient chacune l'hypothèse H.

En effet, d'après les résultats de Kaplansky, δ est fermée pour la multiplication par les fonctions réelles continues sur X . Soit alors D un élément arbitraire de Δ . Approchons-le uniformément en norme par des éléments de δ . En tout point x de X , il existe $d_x \in \delta$ tel que $d_x(x) = D(x)$. Alors le champ $D - d_x$ appartient à Δ , et s'annule au point x . Donc, puisque les éléments de Δ sont à normes continues, $\|D(y) - d_x(y)\| < \varepsilon$ pour $y \in W(x)$. Considérons alors un recouvrement fini de X par des voisinages ouverts $W(x_i)$, et $\lambda_i(y)$ la partition continue qui lui correspond. L'élément $\sum \lambda_i(y) d_{x_i}(y)$ appartient à δ , et approche uniformément D à moins de ε . En effet:

$$\begin{aligned} \|\sum \lambda_i(y) d_{x_i}(y) - D(y)\| &= \|\sum \lambda_i(y) d_{x_i}(y) - \sum \lambda_i(y) D(y)\| \\ &= \|\sum \lambda_i(y) \{d_{x_i}(y) - D(y)\}\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Topologie de la convergence forte uniforme sur X :

Cette topologie sera définie sur $\mathcal{E}_b$ par le système fondamental de voisinages de 0 qui associe à tout système

$\mathcal{E} : a_1 \dots a_n$ comprenant un nombre réel ε et un nombre fini de vecteurs fixes $a_1 \dots a_n$ de $\mathcal{H}$, le sous-ensemble suivant de $\mathcal{E}_b$:

$$V_{\varepsilon, a_1 \dots a_n} = \left\{ f \in B ; \|f(x) \cdot a_i\| < \varepsilon, \forall x \in X, i = 1 \dots n \right\}$$

Champs fortement continus sur X:

Un champ f est dit fortement continu en x si quels que soient $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathcal{H}$ donnés, il existe un voisinage $V_{\varepsilon, a}(x)$ tel que $y \in V_{\varepsilon, a}(x)$ implique $\|f(y) \cdot a - f(x) \cdot a\| < \varepsilon$.
Un champ f est dit fortement continu s'il est fortement continu en tout point x de X .

Si le champ f est limite, au sens de la topologie de la convergence forte uniforme sur X , de champs fortement continus f_α , f est fortement continu. Cette propriété est à peu près évidente.

D'autre part, il résulte du théorème de Banach-Steinhaus (par ex: Bourbaki, E.V.T, Chap. III, § 3) et du fait qu'un espace de Banach est tonnelé, que tout champ fortement continu sur X est uniformément borné sur X .

Soient deux champs f et g de $\mathcal{E}_b$, fortement continus sur X . Le champ produit $f.g$ est fortement continu sur X .

Soit x un point arbitraire de X . Quels que soient le

nombre positif ε et le vecteur a de $\mathcal{H}$, il existe un voisinage $V(x)$ de x tel que

$$y \in V(x) \text{ entraîne } \|f(y) \cdot g(y) \cdot a - f(x) \cdot g(x) \cdot a\| = Q < \varepsilon. \text{ En effet:}$$

$$Q \leq \|f(y) \cdot g(y) \cdot a - f(y) \cdot g(x) \cdot a\| + \|f(y) \cdot g(x) \cdot a - f(x) \cdot g(x) \cdot a\|$$

Mais, d'après les hypothèses, on peut trouver un voisinage $V_1(x)$ tel que $y \in V_1(x)$ entraîne $\|f(y) \cdot g(x) \cdot a - f(x) \cdot g(x) \cdot a\|$
 $< \frac{\varepsilon}{2}$. Soit alors F une borne supérieure de

$\|f\|$ sur X . Il existe un voisinage $V_2(x)$ tel que
 $y \in V_2(x)$ entraîne $\|g(y) \cdot a - g(x) \cdot a\| < \frac{\varepsilon}{2F}$. Si l'on pose
 $V(x) = V_1(x) \cap V_2(x)$, alors $y \in V(x)$ entraîne $Q < \varepsilon$

Proposition I: Soit B une algèbre de champs fortement continus sur X , autoadjointe, fermée dans l'algèbre $\mathcal{E}_b$ de tous les champs uniformément bornés sur X pour la topologie de la convergence forte uniforme sur X , et fermée pour la multiplication par les champs constants bornés. Alors toute sous-algèbre b , autoadjointe, fermée dans B pour la même topologie, fermée pour la multiplication par les champs constants bornés, et biapprochante dans B , est identique à B .

Considérons en effet le projecteur orthogonal P_n sur le sous-espace de dimension finie $\mathcal{H}_n$ engendré par les n premiers vecteurs de la base orthonormée $\{e_l\}$ de $\mathcal{H}$ (Nous supposons ici $\mathcal{H}$ séparable, quoique la démonstration s'étende à un espace de Hilbert quelconque). Les champs de la forme $P_n \cdot f(x)$, P_n avec $f \in B$ forment une algèbre, puisque

$$(P_n f(x) P_n) (P_n g(x) P_n) = P_n [f(x) \cdot P_n \cdot g(x)] P_n$$

et que $f(x) \cdot P_n \cdot g(x)$

appartient à B par hypothèse. Désignons par B_n l'algèbre de tous ces champs. A l'algèbre b et au projecteur P_n on peut de même associer l'algèbre b_n . B_n et b_n sont des algèbres évidemment autoadjointes de champs définis et continus dans l'algèbre L ($\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n$) de tous les opérateurs linéaires de $\mathcal{H}_n$ dans $\mathcal{H}_n$, fermées de plus pour la topologie de Kaplansky. Comme b_n est biapprochante dans B_n , $b_n = B_n$ d'après le lemme I. Montrons maintenant que $f_n(x) = P_n f(x) P_n$ tend vers $f(x)$ au sens de la convergence faite uniforme sur X, quand $n \longrightarrow \infty$. Il faut montrer que des vecteurs a_i de $\mathcal{H}$ étant donnés arbitrairement en nombre fini, ainsi qu'un nombre $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier N tel que $n > N$ entraîne $\| \sum_{i=1}^p f_n(x) a_i - f(x) \cdot a_i \| < \varepsilon$ pour tout point x de X. Comme $\| f(x) \|$ est majorée sur tout X par une constante F, et comme $\| f_n \|$ est partout inférieure à $\| f \|$, on peut remplacer chaque a_i par une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de base e_j . On est donc ramené à trouver un entier N tel que $\| f_n(x) \cdot e_j - f(x) \cdot e_j \| < \varepsilon, \forall x \in X, j = 1, \dots, F$ et $n > N$. Comme les e_j sont en nombre fini, il suffit de déterminer pour chaque e_k un entier N_k tel que $n > N_k$ entraîne $\| f_n(x) e_k - f(x) e_k \| < \varepsilon, \forall x \in X$. Or, en chaque point x, nous pouvons évidemment trouver un entier $N(x)$ tel que $\| f_{N(x)} e_k - f(x) e_k \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme le champ $f_N(x) - f(x)$ est fortement continu, on peut trouver un voisinage ouvert $V(x)$ de x, tel que, pour $y \in V(x)$,

$\|f_{N(x)}(x) \cdot e_k - f(x) \cdot e_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Remarquons que pour

$n > N(x)$, nous aurons évidemment

$\|f_n(y) \cdot e_k - f(y) \cdot e_k\| < \varepsilon$ pour tout $y \in V(x)$.

Nous pouvons extraire, du recouvrement de X par ces $V(x)$, un recouvrement fini: $\{V(x_h)\}, h=1 \dots q$, et à chaque $V(x_h)$ se trouve associé un entier N_h . Comme valeur de l'entier N_k cherché, nous pourrons prendre:

$$N_k = \sup_{h=1 \dots q} N_h$$

Cette démonstration montre également que les algèbres B du type considéré dans la proposition I sont fermées pour la multiplication par les fonctions réelles continues sur X : ce qui résulte de la possibilité d'approcher uniformément fortement le champ f de B par des champs f_n , et de la propriété de l'algèbre B_n d'être fermée pour la multiplication par les fonctions réelles continues sur X .

Cherchons à généraliser quelque peu ce résultat:

Proposition 2: Soit C un ensemble de champs hermitiens de rang fini en chaque point de X , et continus dans l'algèbre normée $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, ^{P. 12} tel qu'en chaque point x de X , l'opérateur unité de $\mathcal{H}$ soit limite forte d'opérateurs $\gamma(x), \gamma \in C$. Considérons une algèbre B de champs fortement continus sur X , autoadjointe, fermée dans $\mathcal{E}_b$ pour la topologie de la convergence forte uniforme sur X , et stable pour la multiplication par les éléments de C . Alors toute sous-algèbre

b de B , possédant toutes les propriétés ci-dessus, et bi-approchantes dans B , est identique à B .

Prenons un élément déterminé γ de C , et considérons les algèbres $\gamma B \gamma$, $\gamma b \gamma$. Comme $\gamma(x)$ est de rang fini, la trace $\gamma^{(x)} B_x \gamma^{(x)}$ de $\gamma B \gamma$ au point x est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'algèbre $\mathcal{B}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$ de tous les opérateurs linéaires bornés de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}$, donc un sous-ensemble fermé de $\mathcal{B}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$. Par ailleurs $\gamma_x B_x \gamma^{(x)}$ est une algèbre d'opérateurs de rangs finis, donc duale. Enfin, il est manifeste que les champs de $\gamma B \gamma$ sont à normes continues^(x), que $\gamma B \gamma$ et $\gamma b \gamma$ sont auto-adjointes, et que $\gamma b \gamma$ est biapprochante dans $\gamma B \gamma$. Considérons les adhérences $\overline{\gamma B \gamma}$ et $\overline{\gamma b \gamma}$ de $\gamma B \gamma$ et $\gamma b \gamma$ dans $\mathcal{E}_b$ au sens de la topologie de Kaplansky.

$\overline{G_\gamma} = \overline{\gamma B \gamma}$ et $\overline{g_\gamma} = \overline{\gamma b \gamma}$ sont autoadjointes. (On pose $G_\gamma = \gamma B \gamma$ et $g_\gamma = \gamma b \gamma$). En effet, si $f_\alpha \rightarrow f$, $f_\alpha \in G_\gamma$, au sens de la topologie de Kaplansky, alors $f_\alpha^* \rightarrow f^*$ pour la même topologie, et $f_\alpha^* \in G_\gamma$ puisque G_γ est autoadjointe. Par ailleurs, les champs de $\overline{G_\gamma}$ et de $\overline{g_\gamma}$ sont à normes continues, puisqu'ils sont limites uniformes pour la topologie de Kaplansky de champs à normes continues appartenant à G_γ ou à g_γ .

Les algèbres $\overline{G_\gamma}$ et $\overline{g_\gamma}$ possèdent donc les propriétés suivantes:

1) Ce sont des algèbres de champs à normes continues.

2) $\overline{G_\gamma}$ est complète pour la norme sup., les traces de $\overline{G_\gamma}$ en chaque point sont fermées et constituent des algèbres duales (en effet les traces de $\overline{G_\gamma}$ et de $\overline{g_\gamma}$ sont les

mêmes que celles de G_γ et de g_γ) qui sont évidemment remplies entièrement par les champs de $\overline{G_\gamma}$.

3) $\overline{g_\gamma}$ est fermée dans $\overline{G_\gamma}$ (pour la topologie de Kaplansky, et biapprochante dans $\overline{G_\gamma}$ (puisque g_γ est biapprochante dans G_γ , et que le passage aux adhérences ne modifie pas les traces).

Le lemme I, appliqué à $\overline{G_\gamma}$ et $\overline{g_\gamma}$ montre que ces deux algèbres sont identiques. Ainsi g_γ est dense dans $\overline{G_\gamma}$, pour la topologie de Kaplansky donc a fortiori pour la topologie de la convergence forte uniforme sur X. Mais les champs de g_γ , c'est-à-dire les champs $\gamma f \gamma$, $f \in b$, appartiennent eux-mêmes à b, puisque b est stable pour la multiplication par les champs de C. $\overline{G_\gamma}$ appartient donc à l'adhérence de b pour la topologie de la convergence forte uniforme sur X, c'est-à-dire à b puisque b est fermée pour cette topologie. Ainsi: $\overline{G_\gamma} \subseteq b$.

Montrons maintenant, à l'aide de ce résultat, que l'on peut approcher uniformément fortement sur X un champ F arbitraire de B par des champs de b. Remarquons d'abord pour cela que toute algèbre $\overline{G_\gamma}$, quel que soit $\gamma \in C$, est fermée pour la multiplication par les fonctions continues réelles sur X.

Donnons-nous un vecteur $\alpha \in \mathcal{H}$. (Nous en prenons un pour alléger l'écriture, mais la démonstration est identique pour un nombre fini quelconque de vecteurs). Considérons un point quelconque x_I de X. Comme il existe des champs $\gamma_\alpha \in C$, tels que $\gamma_\alpha(x_I)$ tende fortement vers I, on peut trouver $\gamma_1 \in C$ tel que le champ $\varphi_1 = \gamma_1 F \gamma_1$

vérifie: $\|\varphi_1(x_1) \cdot a - F(x_1) \cdot a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. En raison de la forte continuité des champs utilisés, il existera un voisinage $W(x_1)$ tel que pour $y \in W(x_1)$: $\|\varphi_1(y) \cdot a - F(y) \cdot a\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient alors un recouvrement fini de X par des voisinages ouverts $W(x_i)$, et $\{\lambda_i(y)\}$ la partition continue de l'unité qui lui correspond. Considérons le champ

$$\sum_i \lambda_i(y) \varphi_i(y) :$$

1) $\lambda_i \varphi_i \in \overline{G_X}$ puisque $\varphi_i \in \overline{G_X}$ (on a même $\varphi_i \in G_X$),

et que cette algèbre $\overline{G_X}$ est fermée pour la multiplication par les fonctions réelles continues. Donc: $\lambda_i \varphi_i \in b$,

et $\sum_i \lambda_i \varphi_i \in b$ (puisque chaque $\overline{G_X} \subset b$).

2) $\|\sum_i \lambda_i(y) \varphi_i(y) - F(y)\| a < \varepsilon, \forall y \in X$.

En effet:

$$\begin{aligned} \|\sum_i \lambda_i(y) \varphi_i(y) \cdot a - F(y) \cdot a\| &= \|\sum_i \lambda_i(y) \varphi_i(y) \cdot a - \sum_i \lambda_i(y) F(y) \cdot a\| \\ &= \|\sum_i \lambda_i(y) \{\varphi_i(y) \cdot a - F(y) \cdot a\}\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Remarquons que $\overline{G_X} \subset B$, puisque $G_X \subset B$ et que B est uniformément fortement fermée. Remarquons également que, étant donnée une fonction réelle continue sur X arbitraire:

λ , nous aurons:

$$\|\sum_i \lambda(y) \lambda_i(y) \varphi_i(y) \cdot a - \lambda(y) F(y) \cdot a\| < \|\lambda\| \varepsilon.$$

De plus, le champ $\lambda(y) \lambda_i(y) \varphi_i(y)$ appartient lui-aussi à $\overline{G_X}$ qui est fermée pour la multiplication par les fonctions continues réelles. Donc $\sum \lambda(y) \lambda_i(y) \varphi_i(y) \in \overline{G_X}$.

Ainsi l'on peut approcher uniformément fortement le champ λF par des champs de B . Donc $\lambda F \in B$. D'où:

Proposition 2 bis: Soit C un ensemble de champs hermitiens, de rangs localement finis sur X , continus dans $\mathcal{B}(h, h)$.

tel qu'en chaque point x de X , l'opérateur unité de $\mathfrak{h}$ soit limite forte d'opérateurs $\gamma(x)$, $\gamma \in \mathbb{C}$. Alors toute algèbre B de champs fortement continus sur X , biapprochante dans les traces B_x de B , autoadjointe, fermée dans $\mathcal{B}_b$ pour la topologie de la convergence forte uniforme sur X , et stable pour la multiplication par les éléments de $\mathbb{C}$, est fermée pour la multiplication par les fonctions réelles continues sur X .

(I) Soit un champ γ hermitien, de rang fini en chaque point de X , et continu dans l'algèbre $\mathcal{B}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$. Soit f un champ fortement continu sur X . Alors $\gamma f \gamma$ est un champ à norme continue. En effet:

$$\begin{aligned} \|\gamma(x) f(x) \gamma(x) - \gamma(x_0) f(x_0) \gamma(x_0)\| &\leq \|\gamma(x) f(x) \gamma(x) - \gamma(x) f(x_0) \gamma(x_0)\| + \|\gamma(x) f(x_0) \gamma(x_0) - \gamma(x_0) f(x_0) \gamma(x_0)\| \\ &\leq \|\gamma(x) f(x) \gamma(x) - \gamma(x_0) f(x) \gamma(x_0)\| + \|\gamma(x_0) f(x) \gamma(x_0) - \gamma(x_0) f(x_0) \gamma(x_0)\| + \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \end{aligned}$$

où l'on a posé $\varphi(x) = \gamma(x_0) f(x) \gamma(x_0)$, champ lui aussi continu dans $\mathcal{B}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$, puisque fortement continu et opérant à l'intérieur d'un sous-espace fixe de rang fini de $\mathfrak{h}$. Donc $\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|$ tend vers 0 quand x_0 tend vers x . Du fait de la continuité de $\gamma(x)$ dans $\mathcal{B}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$ et de la possibilité de majorer uniformément $\|f(x)\|$, $\|\gamma(x)\|$ sur X , les deux expressions complémentaires tendent aussi vers 0 quand x_0 tend vers x .

Remarque: Ces résultats s'étendent aux algèbres de champs faiblement continus sur X , fermées pour la topologie de la convergence faible uniforme sur X , mais dans ce cas nous devons faire l'hypothèse que les champs considérés sont $\# \mathcal{B}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$ désigne l'algèbre de tous les opérateurs bornés de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}$.

uniformément bornés sur X :

Proposition 2 ter: Soit C un ensemble de champs hermitiens de rangs finis en chaque point de X , continus dans l'algèbre $B(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$, tel qu'en chaque point x de X , l'opérateur unité de $\mathfrak{h}$ soit limite faible d'opérateurs $\gamma(x)$, $\gamma \in C$.

Toute algèbre B de champs faiblement continus, autoadjointe, fermée dans $\mathcal{L}_b$ pour la topologie de la convergence faible uniforme sur X , biapprochante dans les traces B_x de B , et stable pour la multiplication par les éléments de C , est fermée pour la multiplication par les fonctions réelles continues sur X . Si b est une sous-algèbre de B , possédant toutes les propriétés précédentes, $b=B$.

III.- Extension des résultats du paragraphe II dans le cas où les espaces de Hilbert associés aux points de X ne sont pas identiques.

Nous associons maintenant aux différents points de X des espaces de Hilbert $\mathfrak{h}_x$, différents les uns des autres. Toutefois, nous supposerons qu'il existe une famille $\mathcal{F}$ de champs de vecteurs $\{E_\alpha(x)\}$ possédant les propriétés suivantes:

- 1) $\|E_\alpha(x)\|$ est fonction continue de x , quel que soit α ;
- 2) $\langle E_\alpha(x), E_\beta(x) \rangle = 0$ si $\alpha \neq \beta$;
- 3) Les combinaisons linéaires, au point x , des vecteurs $E_\alpha(x)$ sont partout denses dans $\mathfrak{h}_x$.

Soit $\mathcal{F}'$ l'espace vectoriel de champs de vecteurs engendré par la famille $\mathcal{F}$, les scalaires étant les fonctions complexes continues sur X .

Champs de vecteurs continus sur X.

Nous dirons qu'un champ de vecteurs est continu sur X s'il est limite uniforme sur X de champs de vecteurs appartenant à $\mathcal{F}'$.

Champs d'opérateurs continus sur X.

Nous dirons qu'un champ d'opérateurs f est continu sur X s'il transforme tout champ de vecteurs continu sur X en un champ de vecteurs continu sur X.

Champs d'opérateurs réguliers:

Nous dirons qu'un champ d'opérateurs f défini sur X est régulier s'il est continu et uniformément borné sur X ainsi que le champ d'opérateurs f^* .

L'ensemble des champs réguliers sur X, muni de la norme de la convergence uniforme sur X, forme une C^* -algèbre.

Ces définitions coïncident dans le cas particulier que nous considérons avec les définitions du chapitre III du mémoire de Godement: "Sur la théorie des représentations unitaires".

Champs d'opérateurs biréguliers:

Soit P_{α} le champ d'opérateurs constitué en chaque point x du projecteur orthogonal projetant l'espace $\mathcal{H}_x$ sur la droite engendrée par le vecteur $E_{\alpha}(x)$. Nous dirons qu'un champ d'opérateurs f est birégulier si 1) il est régulier et, 2) chaque fois que l'un des $E_{\alpha}(x)$, $E_{\alpha_i}(x)$ par exemple, tend vers 0 quand x tend vers x_0 , alors $\|f(x)P_{\alpha_i}(x)\|$ et $\|f^*(x)P_{\alpha_i}(x)\| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow x_0$.

Ces champs biréguliers forment une algèbre autoadjointe.

Champs d'opérateurs de rangs globalement finis sur X.

Nous dirons qu'un champ d'opérateurs continu f est de rang globalement fini sur X s'il existe un système fini $E_{\alpha_1} \dots E_{\alpha_q}$ d'éléments de la famille $\mathcal{F}$ tel que, en tout point x de X , $f(x)$ transforme $\mathcal{H}_x^q$ en un sous-espace de lui-même et s'annule sur le complémentaire orthogonal de $\mathcal{H}_x^q$ dans $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_x^q$ étant le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}_x$ engendré par les vecteurs $E_{\alpha_1}(x) \dots E_{\alpha_q}(x)$.

Un champ birégulier f , de rang globalement fini sur X , possède une norme continue:

Montrons en effet que $\|P_{\alpha_i}(x)f(x)P_{\alpha_j}(x)\|$, où $I \leq \{i, j\} \leq q$, est une fonction continue de x , d'où résultera la continuité de $\|f(x)\|$. Remarquons que le champ d'opérateurs $P_{\alpha_i}(x)f(x)P_{\alpha_j}(x)$ est continu. Plaçons-nous au point x_0 . Le champ $P_{\alpha_i}fP_{\alpha_j}$ étant continu, transforme le champ de vecteurs continu $E_j(x)$ en un champ de vecteurs $\gamma_j^i(x)E_i(x)$ qui doit être continu, ce qui signifie que $\gamma_j^i(x)$ est une fonction scalaire continue. Ainsi,

$$\|P_{\alpha_i}(x)f(x)P_{\alpha_j}(x)\| = \frac{\|\gamma_j^i(x)\| \|E_i(x)\|}{\|E_j(x)\|}$$

est une fonction continue au point x_0 pourvu que $\|E_j(x_0)\| \neq 0$. Si $\|E_j(x_0)\| = 0$, comme $f(x)$ est birégulier, la norme $\|P_{\alpha_i}(x)f(x)P_{\alpha_j}(x)\|$ sera encore continue en x_0 .

Topologie de la convergence forte uniforme sur l'ensemble $\mathcal{E}_r$ des champs d'opérateurs réguliers.

Nous définirons cette topologie par le système fondamental de voisinages du champ nul qui associe à tout sys-

tème $\varphi_1 \dots \varphi_p ; \varepsilon$ constitué d'un nombre fini de champs de vecteurs continus arbitraires et d'un nombre positif l'ensemble de $\mathcal{E}_r$:

$$\bigvee_{\varphi_1 \dots \varphi_p, \varepsilon} = \left\{ f \in \mathcal{E}_r ; \|f(x) \cdot \varphi_i(x)\| < \varepsilon, \forall x \in X ; 1 \leq i \leq p \right\}$$

Proposition 3: Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de champs γ hermitiens, biréguliers et de rangs globalement finis sur X , tel qu'en chaque point x de X , I soit limite forte d'opérateurs $\gamma(x) ; \gamma \in \mathcal{C}$. Soit B une algèbre autoadjointe d'opérateurs réguliers, fermée dans $\mathcal{E}_r$ pour la topologie de la convergence forte uniforme, stable pour la multiplication par les éléments de $\mathcal{C}$, biapprochante dans les traces B_x de B . Alors 1) B est fermée pour la multiplication par les fonctions réelles continues sur X et 2) toute sous-algèbre b de B vérifiant les conditions imposées à B est identique à B .

Soit γ un élément quelconque de $\mathcal{C}$. Posons $G_\gamma = \gamma B \gamma$, $g_\gamma = \gamma b \gamma$. Toutes les propriétés des algèbres G_γ et g_γ (adhérences de G_γ et g_γ pour la topologie de Kaplansky) établies dans la démonstration de la proposition 2 se démontrent d'une manière identique dans le cas présent. Il convient cependant de remarquer que la continuité des champs de G_γ résulte ici de ce que les champs $\gamma f \gamma$, où f appartient à B donc est régulier, sont biréguliers (grâce au fait que f est uniformément borné sur X) et de rangs globalement finis.

Reprenons la fin de la démonstration: montrons que l'on peut approcher uniformément fortement sur X un champ F arbitraire de B par des champs de b . Donnons-nous un champ de

vecteurs continu a. (Nous en prenons un seul, mais la démonstration est identique dans le cas d'un nombre fini). Comme il existe des champs $\gamma_\alpha \in C$, tels que $\gamma_\alpha(x_I)$, tende fortement vers 1, on peut trouver $\gamma_I \in C$ tel que le champ $\varphi_I = \gamma_I F \gamma_I$ vérifie: $\|\varphi_I(x_I) a(x_I) - F(x_I) a(x_I)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. En raison de la continuité des champs d'opérateurs utilisés, il existera un voisinage $W(x_I)$ tel que pour $y \in W(x_I)$:

$$\|\varphi_I(y) a(y) - F(y) a(y)\| < \varepsilon. \quad \text{Soient alors un}$$

recouvrement fini de X par des voisinages $W(x_i)$ ouverts, et $\{\lambda_i(y)\}$ la partition continue de l'unité qui lui correspond. Considérons le champ $\sum_i \lambda_i(y) \varphi_i(y)$:

1) $\lambda_i \varphi_i \in \overline{G_\gamma}$ puisque $\varphi_i \in \overline{G_\gamma}$ (on a même $\varphi_i \in G_\gamma$), et que cette algèbre $\overline{G_\gamma}$ est fermée pour la multiplication par les fonctions réelles continues sur X . Donc $\lambda_i \varphi_i \in b$, et $\sum_i \lambda_i \varphi_i \in b$ (puisque chaque $\overline{G_\gamma} \in b$).

2) Ce champ vérifie:

$$\|\sum_i \lambda_i(y) \varphi_i(y) a(y) - F(y) a(y)\| < \varepsilon, \quad \forall y \in X.$$

En effet:

$$\|\sum_i \lambda_i(y) \varphi_i(y) a(y) - F(y) a(y)\| = \|\sum_i \lambda_i(y) \{\varphi_i(y) a(y) - F(y) a(y)\}\| < \varepsilon$$

Ceci démontre la partie 2) de l'énoncé. La partie 1) résulte de cette démonstration, et plus particulièrement, pour une fonction réelle continue sur X arbitraire λ , de la possibilité d'approcher uniformément fortement sur X le champ $\lambda(y)F(y)$ par des champs du type: $\sum_i \lambda(y) \lambda_i(y) \varphi_i(y)$ qui appartiennent à B , puisque $\overline{G_\gamma}$ appartient à B et est fermée pour la multiplication par les fonctions continues réelles sur X .

IV) Théorème de Stone-Weierstrass pour des algèbres de fonctions à valeurs dans des BQ^* -algèbres.

Définition d'une BQ^* algèbre: A est appelée une BQ^* algèbre si c'est une algèbre de Banach réelle (i.e. construite sur le corps des réels) dotée d'une involution vérifiant les conditions suivantes: (Arens: Certain Banach algebras)

$$I-(rf+g)^* = rf^* + g^*, \forall r \text{ réel}; (fg)^* = g^*f^*; f^{**} = f.$$

II- ff^* appartient au centre de A quel que soit $f \in A$

III- $\|f\|^2 \leq \|ff^* + gg^*\|$ si f et g commutent.

$$IV- \|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Nous utiliserons aussi le théorème de représentation suivant extrait du même mémoire d'Arens:

Théorème: Soit X_0 un espace compact séparé sur lequel le groupe orthogonal Γ agit comme un groupe de transformations (laissant un point x_0 fixe). Considérons la sous algèbre A de l'algèbre $\mathcal{C}(X_0, Q)$ - algèbre de toutes les fonctions continues sur X_0 à valeurs dans l'algèbre Q des quaternions - constituée de celles des fonctions de $\mathcal{C}(X_0, Q)$ - s'annulant en x_0 - qui satisfont à : $f(\alpha x) = J_\alpha[f(x)]$, $\forall x \in X_0$ où J_α est l'automorphisme interne de Q associé à la rotation α . Posons $\|f\| = \sup |f(x)|$ et $f^*(x) = f(x)^*$ pour chaque $f \in A$ (où $f(x)^*$ désigne le quaternion conjugué de $f(x)$). Alors A est une BQ^* algèbre (possédant une unité si et seulement si x_0 est isolé), $X_0 = \text{Hom}(A, Q)$, et toutes les BQ^* algèbres s'obtiennent de cette manière.

Il résulte de ce théorème que $\|x^*\| = \|x\|$ pour tout $x \in A$. Donc $\|x^*x\| \leq \|x\|^2$

D'autre part, III donne, si l'on y fait:

$$g = 0: \|x\|^2 \leq \|xx^*\| \quad . \quad \text{Si l'on remplace } x \text{ par } x^* :$$

$$\|x^*\|^2 = \|x\|^2 \leq \|x^*x\| \quad .$$

Donc A vérifie les conditions $\|x^*\| = \|x\|$; $\|xx^*\| = \|x\|^2$.

Considérons maintenant l'algèbre complexifiée $\widetilde{A}$ de A.

Définissons une involution et une norme sur $\widetilde{A}$ de la manière suivante : $(a+ib)^* = (a^* - ib^*)$; $\|a+ib\| = \|a\| + \|b\|$.

Vérifions que l'on a les propriétés caractéristiques d'une norme:

$$\|a+ib+c+id\| = \|a+c\| + \|b+d\| \leq \|a\| + \|c\| + \|b\| + \|d\| = \|a+ib\| + \|c+id\|$$

$$\|(a+ib)(c+id)\| = \|ac-bd\| + \|bc+ad\| \leq \|a\|\|c\| + \|b\|\|d\| + \|b\|\|c\| + \|a\|\|d\| =$$

$$[\|a\| + \|b\|][\|c\| + \|d\|] = \|(a+ib)\| \cdot \|(c+id)\|$$

Il est évident que l'on a encore $\|x^*\| = \|x\|$ pour un élément x quelconque de $\widetilde{A}$, alors que la relation $\|x^*x\| = \|x\|^2$ ne subsiste pas pour un tel élément x quelconque de $\widetilde{A}$, et que par ailleurs $\widetilde{A}$ munie de cette norme est une algèbre complète.

Soit h un élément hermitien quelconque de A, et considérons l'algèbre fermée $\widetilde{H}$ engendrée dans $\widetilde{A}$ par h . Tout élément de $\widetilde{H}$ est limite en norme d'éléments du type :

$$k = \sum_{m=1}^p \alpha_m h^m + i \sum_{n=1}^q \beta_n h^n \quad , \quad \text{où les } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont réels. Pour}$$

établir dans $\widetilde{H}$ la relation: $\|x\|^2 \leq C \|xx^*\|$, il suffit (l'involution et la multiplication étant continués) de

l'établir pour les éléments du type k . Montrons donc que

$$\|k\|^2 \leq C \|kk^*\|.$$

$$\|kk^*\| = \left\| \left(\sum_I^p \alpha_m h^m \right)^2 + \left(\sum_I^q \beta_n h^n \right)^2 \right\|$$

$$\|k\|^2 = \left\{ \left\| \sum_I^p \alpha_m h^m \right\|^2 + \left\| \sum_I^q \beta_n h^n \right\|^2 \right\}$$

Utilisons la représentation d'Arens. Soit h_Q la fonction définie sur X_0 à valeurs dans Q représentant h ; h_Q est à valeurs réelles puisque h est hermitien. Posons $x =$

$$\sum_I^p \alpha_m h_Q^m, \quad y = \sum_I^q \beta_n h_Q^n; \quad x \text{ et } y \text{ sont}$$

aussi des fonctions à valeurs réelles sur X_0 .

$$\|kk^*\| = \sup_{X_0} (x^2 + y^2); \quad \|k\|^2 = \left[\sup_{X_0} |x| + \sup_{X_0} |y| \right]^2$$

Cherchons une constante F telle que

$$\left[\sup_{X_0} |x| + \sup_{X_0} |y| \right]^2 \leq F \sup_{X_0} (x^2 + y^2), \text{ quels que soient les}$$

polynômes en h_Q : x et y . Pour cela remarquons que

$$\sup_{X_0} (x^2 + y^2) \geq \sup_{X_0}^2 \left\{ \sup_{X_0} |x|; \sup_{X_0} |y| \right\}$$

$$\text{et que } \left[\sup_{X_0} |x| + \sup_{X_0} |y| \right] \leq 2 \sup_{X_0} \left\{ \sup_{X_0} |x|; \sup_{X_0} |y| \right\}.$$

De cette remarque résulte que $F = 4$ convient. Donc on a pour tout élément k de $\widetilde{H}$: $\|k\|^2 \leq 4 \|kk^*\|$.

Nous allons maintenant faire les hypothèses suivantes (trop restrictives dans l'immédiat, mais que nous ne serons pas obligés de modifier par la suite):

Proposition 4: Soit X un espace compact en chaque point duquel est donnée une BQ^* algèbre A_x . Supposons que chaque A_x possède une unité, mais admettons la possibilité d'un point exceptionnel ω pour lequel $A_\omega = 0$.

Soit B une algèbre autoadjointe de fonctions f sur X avec $f(x) \in A_x$; nous supposons $\|f(x)\|$ bornée, continue en 0 — i.e. si $f(x) = 0$, alors $\|f(y)\| < \epsilon$ pour $y \in V(x)$ —, continue en I — i.e si $f(x) = I$, alors $\|f(y) - I\| < \epsilon$ pour $y \in W(x)$ — et B complète pour la norme sup. Supposons que B , quel que soit le couple de points distincts x et y de X ($x \neq y$), contienne une fonction f telle que $f(y) = 0$ et $f(x) = I$. Alors B contient $C'(x)$, algèbre de toutes les fonctions continues à valeurs réelles sur X , s'annulant au point exceptionnel u .

Nous supposons l'existence du point u exceptionnel — en adjoignant si besoin un point isolé à X —. Adjoignons une unité à B : soit C la BQ^* algèbre obtenue par adjonction à B des fonctions réelles constantes sur X (remarquons en effet que B est d'une manière évidente une BQ^* algèbre). Nous montrerons que C contient toutes les fonctions continues réelles sur X , ce qui montrera que B contient toutes celles qui s'annulent en u . Notons que la continuité de $\|f(x)\|$ en 0 et I se conserve dans C .

Introduisons aussi l'algèbre $\widetilde{C}$ complexifiée de C . Considérons un élément hermitien h de B , l'algèbre fermée H qu'engendre h dans C , $\widetilde{H}$ l'algèbre fermée qu'engendre h dans $\widetilde{C}$. $\widetilde{H}$ est une algèbre commutative involutive complète, vérifiant la condition $\|k\|^2 \leq 4\|kk^*\|$. Donc $\widetilde{H}$ est isomorphe et homéomorphe à l'algèbre $\mathcal{C}(K)$ de toutes les fonctions complexes continues sur le spectre K de h dans $\widetilde{H}$ s'annulant en 0 . Cela signifie que $\widetilde{H}$ est identique à l'algèbre $\mathcal{C}(K)$, munie

d'une norme $\| \cdot \|$ équivalente à la norme $\| \cdot \|_{\infty}$ pour laquelle $\mathcal{C}(K)$ est une C^* -algèbre. Désignons par $\widetilde{H}_{\infty}$ l'algèbre $\mathcal{C}(K)$ munie de sa norme naturelle: $\| \cdot \|_{\infty}$. Soit $P(t)$ une fonction continue réelle de la variable réelle t telle que $P(0)=0$. Nous savons que, dans $\widetilde{H}_{\infty}$, on obtient un élément $P(h)$ bien déterminé de $\widetilde{H}_{\infty}$, en considérant la restriction à K de la fonction $P(t)$, qui définit un élément et un seul de $\widetilde{H}_{\infty}$: celui que nous définissons comme $P(h)$. Toujours dans l'algèbre $\widetilde{H}_{\infty}$, si I est un idéal fermé bilatère, soit h' l'image de h modulo I . Dans la C^* -algèbre $\widetilde{H}_{\infty}/I$, nous pouvons former $P(h')$. Alors nous savons que $P(h')$ est l'image dans $\widetilde{H}_{\infty}/I$ de l'élément $P(h)$ de $\widetilde{H}_{\infty}$. Si pour I nous prenons l'idéal fermé bilatère constitué de tous les champs de $\widetilde{H}_{\infty}$ qui s'annulent en un même point x de X , ceci montre que le spectre de $h(x)$ appartient au spectre K de h dans $\widetilde{H}_{\infty}$, et que $Ph(x)$ est représenté dans $\widetilde{H}_{\infty x}$ par la restriction au spectre K_x de $h(x)$ dans $\widetilde{H}_{\infty x}$ de la fonction $P(t)$. Toutes ces propriétés, de nature algébrique et topologique, restent vraies dans $\widetilde{H}$.

On peut montrer que le lemme 3-3 de Kaplansky s'applique à h : pour tout $x \in X$ et tout $\xi > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x tel que pour tout $y \in \mathcal{U}$, le spectre de $h(y)$ soit contenu dans un ξ -voisinage de 0 et du spectre K_x de $h(x)$. En effet, soit $\mathcal{W}$ un ξ -voisinage de $K_x + 0$, soit P une fonction continue à valeurs réelles s'annulant sur K_x et égale à 1 sur $\mathcal{W}$. Alors l'élément g de $\widetilde{H}$ représenté par la restriction à K de la fonction P est nul au point x , donc en raison de la continuité de la norme $\|g(z)\|$ en 0, $\|g(y)\| < 1$

pour y dans un voisinage convenable $\mathcal{U}$ de x . Comme $\|g(y)\|_\infty \leq \|g(y)\|$, le spectre de $g(y)$ pour $y \in \mathcal{U}$ doit se trouver dans W .

Grâce au fait que les normes $\|h\|$ et $\|h\|_\infty$ sont ici équivalentes — puisque comme toujours $\|h\|_\infty \leq \|h\|$ et que l'on a établi: $\|h\| \leq 4 \|h\|_\infty$ (puisque $\|h\| \leq 4 \|h\|_\infty$) —, remarquant aussi que dans H_X comme dans H : $\|I\| = \|I\|_\infty = I$, et que I est représenté par la fonction I sur K_X comme sur K , nous allons pouvoir reprendre sans modifications le début de la démonstration du th.3-2 de K , valable dans le cas de C^* algèbres.

Montrons que C contient une fonction égale à 0 et I respectivement sur des sous-ensembles compacts disjoints arbitraires de X . Nous savons que pour tous points distincts y et z , C contient un élément hermitien k tel que $k(y)=0$,

$k(z)=I$. Soit P une fonction continue à valeurs réelles qui s'annule dans un voisinage de 0 et vérifie $P(I)=I$. Alors

$k_I = P(k)$ s'annule dans un voisinage de y et vérifie bien $k_I(z)=I$. Soit K un ensemble compact disjoint de z . Pour chacun de ses points nous obtenons un élément de C s'annulant dans un voisinage du point y et égal à I en z . (k_I appartient à C car P est limite uniforme, sur le spectre de k , de polynômes à coefficients réels. Donc k_I est limite uniforme, dans l'algèbre $\widehat{K}$ fabriquée à partir de k de la façon dont $\widehat{H}$ était fabriquée à partir de h , de polynômes à coefficients réels en k . Ces éléments appartiennent naturellement à C , d'où résulte que k_I lui-même appartient à C .) Un nombre fini de ces voisinages recouvrent K . Par multiplication des fonctions

correspondantes, nous en obtenons une s'annulant sur tout K et égale à I en z . Enfin, soient K et L des compacts disjoints. Pour chaque point z de L , considérons le k_2 construit ci-dessus s'annulant sur K et vérifiant $k_2(z)=I$; nous pouvons supposer k_2 autoadjoint. Avec la même fonction à valeurs réelles P que plus haut, formons $k_3=P(I-k_2)$; $k_3=I$ sur K et s'annule en un voisinage de z . Nous faisons ceci pour chaque point de L , choisissons un recouvrement fini de L par les voisinages obtenus, et multiplions les fonctions k_3 correspondantes. Le résultat est la fonction cherchée de C , égale à I sur K et 0 sur L .

Soit maintenant $\lambda(x)$ une fonction continue réelle sur X . Nous nous proposons de l'approcher à moins de ε par des éléments hermitiens de C . Décomposons X en ensembles ouverts $U_1 \dots U_n$ sur lesquels l'oscillation de λ est moindre que ε , et soient r_i l'une des valeurs prises dans U_i par λ . Soit $V_1 \dots V_n$ un recouvrement de X par des ouverts tels que $\overline{V_i} \subset U_i$. D'après le paragraphe précédent, C contient une fonction d_i égale à I sur V_i , 0 sur $[U_i]$. Ecrivons $e_i = d_i^* d_i$, $e = \sum_i e_i$; $e \in C$. Alors, si nous considérons la représentation d'Arens de C , nous voyons que $e_Q \gg I$ partout sur $\overline{U_i} - \sigma_0$ ($\overline{U_i}$ désignant le compact sur lequel s'effectue la représentation d'Arens de C , et σ_0 , le point isolé exceptionnel de $\overline{U_i}$). Donc e possède un inverse dans C , défini par e_Q^{-1} . e^{-1} est hermitien et appartient au centre de C . Posons $f_i = e^{-1} e_i$; f_i est hermitien, $f_i Q \gg 0$ sur $\overline{U_i} - \sigma_0$ et $\sum_i f_i Q = I$ sur $\overline{U_i} - \sigma_0$.

$\sum_I r_i f_i \in C$ et nous disons que cet élément approche $I \cdot \lambda(x)$ à ε près sur tout X . Soit x arbitraire $\in X$; x appartient aux seuls ouverts $\sqcup_I \dots \sqcup_m$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n r_i f_i(x) &= \sum_{i=1}^m r_i f_i(x) = \lambda(x) \cdot I - \sum_{i=1}^m (\lambda(x) - r_i) f_i(x) \\ &= \lambda(x) \cdot I - n(x) \end{aligned}$$

où $n(x)$ est un élément de C dont la norme est partout inférieure à ε . Il en résulte, puisque C est une algèbre de fonctions fermée pour la norme supérieure, que la fonction $\lambda(x) \cdot I$ appartient à C .

o
o o

Vu et approuvé.

NANCY, le

Le Doyen:

Vu et permis d'imprimer

NANCY, le

Le Recteur,
Président du Conseil de l'Université

G. M A Y E R .

